Osnovne definicije i rezultati iz Uvoda u linearnu algebru

(0.01) Simetrije

Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica (matrica oblika $n \times n$).

a) Za A kažemo da je *simetrična matrica* kadgod je $A = A^\top$, tj. kadgod $a_{ij} = a_{ji}$.

b) Za A kažemo da je *nakrivo-simetrična matrica* kadgod je $A = -A^\top$, tj. kadgod $a_{ij} = -a_{ji}$.

c) Za A kažemo da je *hermitska matrica* kadgod je $A = A^*$, tj. kadgod je $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Ovo je kompleksni analog simetričnosti.

d) Za A kažemo da je *nakrivo-hermitska matrica* kadgod je $A = -A^*$, tj. kadgod je $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$. Ovo je kompleksni analog nakrivo-simetričnosti. ◇

(0.02) Dijagonalne i trougaone matrice

a) Matrice oblike $D = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_d \end{bmatrix}$ zovemo *dijagonalne matrice* i često ih označavamo sa $diag(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_d)$.

b) *Glavna dijagonala* kvadratne matrice su elementi koji se nalaze na dijagonalnoj liniji koja počinje u gornjem lijevom uglu matrice a završava u donjem desnom uglu. Za kvadratnu matricu kažemo da je *trougaona matrica* ako su svi elementi iznad glavne dijagonale ili ispod glavne dijagonale jednaki nula. Za kavadratnu matricu kažemo da je *gornje-trougaona matrica* ako su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nula. Za kvadratnu matricu kažemo da je *donje-trougaona matrica* ako su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli. ◇

(0.03) Inverzna matrica

Za datu kvadratnu matricu $A_{n\times n}$, matricu $B_{n\times n}$ koja zadovoljava uslov

$$AB = I \quad \text{i} \quad BA = I$$

zovemo *inverz* od A i označavamo sa $B = A^{-1}$. Nisu sve kvadratne matrice invertibilne - nula matrica je trivijalni primjer, i postoji veliki broj nenula matrica koje nisu invertibilne. Za invertibilnu matricu kažemo da je *nesingularna*, a za kvadratnu matricu koja nema inverznu matricu kažemo da je *singularna matrica*. ◇

(0.04) Saglasan i nesaglasan sistem

Za sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih kažemo da je *saglasan sistem* ako posjeduje bar jedno rješenje. Ako sistem nema rješenja, tada za sistem kažemo da je *nesaglasan sistem*. ◇

(0.05) Elementarne red (kolona) operacije

Elementarne red (kolona) operacije su:

(i) Zamjena mjesta redova (kolona) i i j.

(ii) Množenje reda (kolone) i sa $\alpha \neq 0$.

(iii) Dodavanje reda (kolone) i pomnožene nekim brojem redu (koloni) j. ◇

(0.06) Ekvivalencija

(i) Kadgod matricu B možemo dobiti iz matrice A kombinacijom elementarnih red ili kolona operacija, pišemo $A \sim B$, i kažemo da su A i B *ekvivalentne* matrice. S obzirom da su elementarne red i kolona operacije u stvari množenje redom sa lijeve i desne strane elementarnim matricama može se dokazati da

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad PAQ = B \text{ za nesingularne } P \text{ i } Q$$

(ii) Kadgod se matrica B može dobiti iz matrice A primjenjujući samo red operacije, pišemo $A \overset{red}{\sim} B$, i kažemo da su matrice A i B *red ekvivalentne*. Drugim riječima

$$A \overset{red}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad PA = B \text{ za nesingularnu } P.$$

(iii) Kad god se matrica B može dobiti iz matrice A primjenjujući samo niz uzastopnih kolona operacija, pišemo $A \overset{kol}{\sim} B$, i kažemo da su matrice A i B *kolona ekvivalentne*. Drugim riječima

$$A \overset{kol}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad AQ = B \text{ za nesingularnu } Q.$$

$\diamond$

(0.07) Red ešelon oblik

Za $m \times n$ matricu E, sa redovima E_{i*} i kolonama E_{*j}, kažemo da je u red ešelon obliku ako sljedeća dva uslova vrijede:

(a) Ako su svi elementi reda E_{i*} jenaki nuli, tada su i svi elementi u redovima ispod E_{i*} jednaki nuli, tj. svi nula redovi su na dnu matrice.

(b) Ako se prvi nenula elemenat u E_{i*} nalazi na $j$toj poziciji, tada su svi elementi ispod i-te pozicije u kolonama E_{*1}, E_{*2},...,E_{*j} nule.

Ova dva uslova kažu da nenula elementi u ešelon obliku moraju ležati na ili iznad glavne linije stepenica čiji je početak u gornjem lijevom uglu matrice i postepeno pada prema dole desno. Pivoti su prvi nenula elementi u ešelon redovima. Tipična struktura za matricu koja je u red ešelon obliku je ilustrirana ispod, gdje su pivoti zaokruženi.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\diamond$

(0.08) Rang matrice

Pretpostavimo da je matrica $A_{m\times n}$ pomoću red operacija svedena na red ešelon oblik E. *Rang* matrice A se definiše kao broj

$$\begin{aligned} rang(A) &= \text{broj pivota} \\ &= \text{broj nenula redova u } E \\ &= \text{broj osnovnih kolona u } A \end{aligned}$$

gdje su *osnovne kolone* od A definisane kao one kolone u A koje sadrže pivot pozicije. $\diamond$

(0.09) Reducirani red ešelon oblik

Za matricu $E_{m\times n}$ kažemo da je u *reduciranom red ešelon obliku* ako su sljedeća tri uslova ispunjena.

(i) E je u red ešelon obliku.

(ii) Prvi nenula elemenat u svakom redu (tj. svaki pivot) je 1.

(iii) Sve vrijednosti iznad svakog pivota su 0.

Tipična struktura za matricu u reduciranom red ešelon obliku je ilustrirana ispod, gdje elementi označeni sa $*$ mogu biti ili nula ili nenula brojevi:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇

(0.10) Saglasnost

Posmatrajmo sistem linearnih jednačina $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Posmatrajmo proširenu matricu oblika $[A|\boldsymbol{b}]$. Svaka od sljedećih tvrdnji je ekvivalentna tvrđenju da je $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ saglasan linearni sistem.

▷ U red redukciji matrice, red sljedećeg oblika se nikad neće pojaviti

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & | & \alpha \end{pmatrix} \text{ gdje je } \alpha \neq 0$$

▷ $\boldsymbol{b}$ nije osnovna kolona matrice $[A|\boldsymbol{b}]$.
▷ $rang[A|\boldsymbol{b}] = rang(A)$.
▷ $\boldsymbol{b}$ je kombinacia osnovnih kolona u A. ◇

(0.11) Sažetak za homogene sisteme

Neka je $A_{m\times n}$ koeficijent matrica za homogeni sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih, i pretpostavimo da je $rang(A) = r$.

(a) Nepoznate koje odgovaraju pozicijama osnovnih kolona (tj. pivot pozicijama) zovemo *osnovne varijable*, a nepoznate koje odgovaraju pozicijama neosnovnih kolona zovemo *slobodne varijable*.

(b) Postoji tačno r osnovnih varijabli i $n - r$ slobodnih varijabli.

(c) Da bi opisali sva riješenja, matricu A reduciramo na red ešelon oblik koristeći Gausovu eliminaciju, i poslije toga vraćamo zamjenu da bi rješenje za osnovne varijable prikazali pomoću slobodnih varijabli. Ovo nam daje *opšte riješenje* koje je u obliku

$$\boldsymbol{x} = x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r},$$

gdje su članovi $x_{f_1}, x_{f_2}, \ldots, x_{f_n}$ slobodne varijable i gdje $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots, \boldsymbol{h}_{n-r}$ su $n \times 1$ kolone koje predstavljaju određeno rješenje homogenog sistema. Kolone $\boldsymbol{h}_i$ su nezavisne od red ešelon oblika koji se koristi u procesu zamjene. Kako slobodne varijable x_{f_i} uzimaju sve moguće vrijednosti, opšte rješenje generiše sva moguća rješenja.

(d) Homogeni sistem posjeduje jedinstveno rješenje (trivijalno rješenje) ako i samo ako $rang(A) = n$ - tj., ako i samo ako nema slobodnih varijabli.

◇

(0.12) Sažetak za nehomogeni sistem

Neka je $A_{m\times n}$ koeficijent matrica za nehomogeni sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, neka je $[A|\boldsymbol{b}]$ proširena matrica i pretpostavimo da je $rang(A) = r$.

(a) Svodeći $[A|\boldsymbol{b}]$ na red ešelon oblik, pa koristeći Gausove eliminacije, i na kraju izražavajući osnoven varijable u smislu slobodnih varijabli, (sve ovo) nas vodi prema *opštem rješenju*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}.$$

Kako slobodne varijable x_{f_i} uzimaju sve moguće vrijednosti, ovo opšte rješenje generiše sva moguća rješenja sistema.

(b) Kolona $\boldsymbol{p}$ je u stvari partikularno rješenje nehomogenog sistema.

(c) Izraz $x_{f_1}\boldsymbol{h}_1 + x_{f_2}\boldsymbol{h}_2 + \ldots + x_{f_{n-r}}\boldsymbol{h}_{n-r}$ je opšte rješenje pridruženog homogenog sistema.

(d) Kolona $\boldsymbol{p}$, kao i kolona $\boldsymbol{h}_i$ su nezavisne od red ešelon oblika u koji se $[A|\boldsymbol{b}]$ reducira.

(e) Sistem posjeduje jedinstveno rješenje ako i samo ako su sljedeće tvrdnje tačne:

- ▷ $rang(A) = n =$ broj nepoznatih.
- ▷ Ne postoje slobodne varijable.
- ▷ Pridruženi homogeni sistem posjeduje samo trivijalno rješenje. ◇

Kroneker-Kapelijeva metoda

Neka je dat sistem linearnih jednačina $Ax=b$, gdje su

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}, \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} \quad i \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m\end{bmatrix}.$$

Matricu $\overline{A}=[A \,\vdots\, b]$ zovemo proširena matrica.

<u>Teorema</u> (Kroneker-Kapeli):

Sistem ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\overline{A}=n$ (n broj nepoznatih).

Ako je $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\overline{A}<n$ tada sistem ima ∞ mnogo rješenja. ($n-\operatorname{rang} A$ nepoznatih uzima se proizvoljno)

Ako je $\operatorname{rang} A<\operatorname{rang}\overline{A}$ tada sistem nema rješenja.

1. Kroneker-Kapelijevom metodom riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x+4y-5z&=-5\\ -x-y+z&=0\\ 2x+y-z&=1. \end{aligned}$$

Rj.

$$\overline{A}=[A \,\vdots\, b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -5 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1\end{array}\right] \underset{I_v \leftrightarrow II_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & -5 \\ 2 & 1 & -1 & 1\end{array}\right] \underset{\substack{II_v+I_v\cdot 2\\ III_v+I_v\cdot 2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

$$\underset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -5\end{array}\right] \underset{III_v+II_v\cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3\end{array}\right]$$

$\operatorname{rang} A=\operatorname{rang}\overline{A}=3$ sistem ima jedinstveno rješenje

$$\begin{aligned} -x-y+z&=0\\ -y+z&=1\\ -z&=-3\\ \hline z&=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x-y&=-3\\ -y&=-2\\ \hline y&=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x-2&=-3\\ x&=1 \end{aligned}$$

Rješenje sistema je uređena trojka $(1,2,3)$.

2. Kroneker-Kapelijevom metodom rješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 \quad &= 2. \end{aligned}$$

Rj. $\bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \underset{III_v - I_v \cdot 2}{\overset{II_v - I_v \cdot 3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$

$\overset{III_v - II_v \cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

rang A = rang $\bar{A} = 2 < 3$
sistem ima ∞ mnogo rješenja
3-2 nepoznatih uzimamo proizvoljno

$x_3 = t$
$-x_2 - 2x_3 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$-x_2 - 2t = 0$
$x_2 = -2t$

$x_1 - 2t + t = 1$
$x_1 = t + 1$

Sistem ima beskonačno mnogo rješenja oblika $(t+1, -2t, t)$ gdje je $t \in \mathbb{R}$.

3. Kroneker-Kapelijevom metodom rješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 4y + 6z &= 2 \\ 3x + 6y + 9z &= 5. \end{aligned}$$

Rj. $\bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right] \underset{III_v - I_v \cdot 3}{\overset{II_v - I_v \cdot 2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$

rang $A = 1$, rang $\bar{A} = 2$, rang $A <$ rang $\bar{A}$
sistem nema rješenja.

4. Kroneker-Kapelijevom metodom diskutovati rješenja sistema za razne vrijednosti parametra λ

$$\begin{aligned} \lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 2 \\ x + y + \lambda z &= -3 \end{aligned}$$

Rj. za $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$ sistem ima jedinstveno rješenje $\left(\frac{1}{\lambda-1}, \frac{2}{\lambda-1}, \frac{-3}{\lambda-1}\right)$

za $\lambda = -2$ sistem ima ∞ mnogo rješenja $\left(\frac{3t-4}{3}, \frac{3t-5}{3}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$

za $\lambda = 1$ sistem nema rješenja

Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 15 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

Rj.

Riješimo sistem Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\overline{C} = [C \,\vdots\, b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 15 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & \lambda \end{array}\right] \underset{III_v - I_v \cdot 2}{\overset{II_v - I_v \cdot 3}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -38 \\ 0 & 0 & 8 & -17 & \lambda - 30 \end{array}\right]$$

$$\overset{III_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -38 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 68 \end{array}\right]$$

1° $\lambda - 68 \neq 0$
$\lambda \neq 68$

$\text{rang}\, C = 2$
$\text{rang}\, \overline{C} = 3$

$\text{rang}\, C < \text{rang}\, \overline{C}$

Prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem nema rješenje

2° $\lambda - 68 = 0$
$\lambda = 68$

$\text{rang}\, C = \text{rang}\, \overline{C} = 2 < 4$ (broj nepoznatih)

Prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi dvije promjenjive uzimamo proizvoljno, npr. $x_4 = t$, $x_1 = s$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= 15 \\ -8x_3 + 17x_4 &= -38 \end{aligned}$$

$x_4 = t$

$-8x_3 + 17t = -38$

$-8x_3 = -17t - 38$

$x_3 = \frac{17}{8}t + \frac{38}{8} = \frac{17}{8}t + \frac{19}{4}$

$x_1 = s$

$2s - x_2 + 3\left(\frac{17}{8}t + \frac{38}{8}\right) - 7t = 15$

$x_2 = \frac{51t}{8} + \frac{114}{8} + 2s - 7t - 15$

$x_2 = -\frac{5}{8}t - \frac{6}{8} + 2s$

$x_2 = 2s - \frac{5}{8}t - \frac{3}{4}$

Za $\lambda = 68$ rješenje sistema je

$$\left(s,\ 2s - \frac{5}{8}t - \frac{3}{4},\ \frac{17}{8}t + \frac{19}{4},\ t\right),\quad t, s \in \mathbb{R}$$

\# Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 &= 9 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Rj: Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$

$$\overline{B} = [B \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 8 & 12 & 7 & \lambda & 9 \\ 6 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \underset{I_v \leftrightarrow IV_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 12 & 7 & \lambda & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} II_v - I_v \cdot 3 \\ III_v - I_v \cdot 2 \\ \sim \\ IV_v - I_v \cdot 4 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-8 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} III_v - II_v \\ \sim \\ IV_v - II_v \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-8 & 0 \end{array}\right]$$

1° za $\lambda = 8$ imamo $rang\, B = rang\, \overline{B} = 2 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja. Dvije promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_1 = t$, $x_4 = s$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_3 + 0x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$x_3 = -1$

$2t + 3x_2 - 2 + 2s = 2$

$3x_2 = 4 - 2t - 2s$

$x_2 = \frac{2}{3}(2 - t - s)$

Rješenje sistema (za $\lambda = 8$) je $(t, \frac{2}{3}(2-t-s), -1, s)$ gdje su $s, t \in \mathbb{R}$.

2° za $\lambda \neq 8$ imamo $rang\, B = rang\, \overline{B} = 3 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja. Jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. $x_2 = t$.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_3 &= 1 \\ (\lambda - 8)x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$x_4 = 0$

$x_3 = -1$

$2x_1 + 3t - 2 = 2$

$2x_1 = 4 - 3t$

$x_1 = 2 - \frac{3}{2}t$

Rješenje sistema (za $\lambda \neq 8$) je $(2 - \frac{3}{2}t, t, -1, 0)$ gdje su $t \in \mathbb{R}$.

Riješiti sistem jednačina za razne vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 &= 11\\
2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5\\
4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7\\
6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 9
\end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker-Kapelijevom metodom:

$$\bar{A} = [A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} \lambda & -4 & 9 & 10 & 11\\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5\\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7\\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \overset{I_v \leftrightarrow IV_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -3 & 7 & 8 & 9\\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5\\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7\\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right] \overset{II_v \leftrightarrow I_v}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5\\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9\\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7\\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right] \overset{I_k \leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 8 & -3 & 7 & 6 & 9\\ 6 & -2 & 5 & 4 & 7\\ 10 & -4 & 9 & \lambda & 11 \end{array}\right] \end{array} \overset{I_k \leftrightarrow II_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_4 & x_3 & x_1 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 3 & 2 & 5\\ -3 & 8 & 7 & 6 & 9\\ -2 & 6 & 5 & 4 & 7\\ -4 & 10 & 9 & \lambda & 11 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\overset{\substack{II_v - I_v\cdot 3\\ III_v - I_v\cdot 2\\ IV_v - I_v\cdot 4}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 3 & 2 & 5\\ 0 & -4 & -2 & 0 & -6\\ 0 & -2 & -1 & 0 & -3\\ 0 & -6 & -3 & \lambda-8 & -9 \end{array}\right] \overset{II_k \leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & \lambda-8 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right] \end{array} \overset{III_v \leftrightarrow II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6\\ 0 & \lambda-8 & -3 & -6 & -9 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{III_v - II_v\cdot 2\\ IV_v - II_v\cdot 3}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-8 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

a) Za $\lambda = 8$ imamo $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 2 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima ∞ mnogo rješenja.
2. promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $x_4 = t$ $x_1 = s$

$$\begin{aligned}
-x_3 - 2x_4 &= -3\\
-x_2 + 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 5
\end{aligned}$$

$x_3 = 3 - 2t$

$-x_2 + 2s + 3(3-2t) + 4t = 5$

$x_2 = 2s + 9 - 6t + 4t - 5$

$x_2 = 2s - 2t + 4$

Za $\lambda = 8$ rješenje sistema je $(s, 2s-2t+4, 3-2t, t)$ $t, s \in \mathbb{R}$

b) Za $\lambda \neq 8$ imamo $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = 3 < 4$ pa prema Kroneker-Kapelijevom teoremu sistem ima ∞ mnogo rješenja.
1. (jednu) promjenjivu uzimamo proizvoljno npr. $x_4 = t$

$$\begin{aligned}
(\lambda - 8)x_1 &= 0\\
-x_3 - 2x_4 &= -3\\
-x_2 + 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 5
\end{aligned}$$

$x_1 = 0$

$x_3 = 3 - 2t$

$-x_2 + 3(3-2t) + 4t = 5$

$x_2 = 9 - 6t + 4t - 5 = -2t + 4$

Za $\lambda \neq 8$ rješenje sistema je $(0, 4-2t, 3-2t, t)$.

Homogeni sistemi linearnih jednačina

Homogeni sistem linearnih jednačina je oblika $A \cdot x = 0$

gdje je
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad i \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

<u>Teorema:</u> Homogeni sistem ima netrivijalna rješenja akko je $D = 0$ $(\det A = 0)$.

1. Riješiti homogeni sistem jednačina
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \quad (1) \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \quad (2) \\ 2x_1 + x_2 \quad &= 0 . \end{aligned}$$

Rj. $(1)+(2)$
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \quad /\cdot 2 \\ \hline 4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$4x_1 + 2x_2 = 0 \quad /:2$

$2x_1 + x_2 = 0$

sistem ima ∞ mnogo rješenja

$x_2 = -2x_1$

$x_1 = t, \quad x_2 = -2t, \quad t \in \mathbb{R}$

$t - 2t + x_3 = 0$

$x_3 = t$

Sistem ima beskonačno mnogo rješenja oblika $(t, -2t, t)$

2. Naći λ tako da sistem
$$\begin{aligned} 3x + y + \lambda z &= 0 \\ 4x - 8y + \lambda z &= 0 \\ 5x - 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$
ima netrivijalna rješenja pa nađi rješenja.

Rj.
$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \lambda \\ 4 & -8 & \lambda \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} \underset{III_v + I_v \cdot 3}{\overset{II_v + I_v \cdot 8}{=\!=}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & \lambda \\ 28 & 0 & 9\lambda \\ 14 & 0 & 3\lambda+3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 28 & 9\lambda \\ 14 & 3\lambda+3 \end{vmatrix} = (-14)\cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 3\lambda \\ 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = -42(-\lambda+2)$$

Za $\lambda = 2$ $(D=0)$ u sistemu postoje netrivijalna rješenja.

Sistem sad izgleda:
$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 0 \quad /\cdot 3 \\ 4x - 8y + 2z &= 0 \quad /\cdot 3 \\ 5x - 3y + 3z &= 0 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9x + 3y + 6z &= 0 \quad (1) \\ 12x - 24y + 6z &= 0 \quad (2) \\ 10x - 6y + 6z &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$(3)-(1)$: $x - 9y = 0$

$(2)-(1)$ $\quad 3x - 27y = 0 \quad /:3$

$x - 9y = 0$

$x = 9y, \quad z = -14y$ postoji ∞ mnogo rješenja

$(9t, t, -14t)$, $t \in \mathbb{R}$ su rješenja sistema

3. Za koje vrijednosti λ sistem ima netrivijalna rješenja
$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 0 . \end{aligned}$$

Rj. za $\lambda = 1$ ili $\lambda = -3$

Pronalaženje inverzne matrice uz pomoć Gauss-Jordan-ovih eliminacija

Posmatrajmo neku proizvoljnu matricu A.
Gauss-Jordan-ove operacije definisane na proizvoljnoj matrici su
(i) množenje proizvoljnog reda matrice brojem različitim od 0
(ii) dodavanje reda i matrice, pomnožen nekim brojem, redu j $(i \neq j)$
Ako je B matrica dobijena iz A pomoću Gauss-Jordanovih operacija pišemo

$$A \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} B$$

Vrijedi sljedeća teorema

<u>Teorem</u> (računanje inverza)
Za inverznu matricu matrice A vrijedi sljedeća redukcija

$$[A \mid I] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I \mid A^{-1}].$$

Ova redukcija neće raditi jedino u slučaju ako se pojavi red nula na lijevoj strani u matrici A, a ovo će se pojaviti ako i samo ako je A singularna matrica. Drugačiji (i nekako mnogo praktičniji) algoritam za pronalaženje inverzne matrice je pomoću LU faktorizacije.

Uz pomoć Gauss-Jordanovih eliminacija izračunati inverznu matricu matrice $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rj:

$$[Q \mid I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{II_v + I_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I_v + II_v \cdot (-1)}$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Prema tome $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Uz pomoć Gauss-Jordanovih eliminacija izračunati inverznu matricu matrice $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rj:

$$[Q \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I_v + II_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II_v + III_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(#) Uz pomoć Gauss-Jordanovih eliminacija izračunati inverznu matricu matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Rj.

$$[P \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[III_v + I_v \cdot (-1)]{II_v + I_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III_v + II_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{I_v + II_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II_v + III_v \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Prema tome $$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

LU faktorizacija

Ako je A $n\times n$ matrica taka da se primjenom elementarnih red operacija nikad ne može pojaviti nula pivot, tada se A može faktorisati kao proizvod $A=LU$, gdje sljedeće osobine važe:

(i) L je donje trougaona a U je gornje trougaona matrica

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

(ii) $l_{ii}=1$ i $u_{ii}\neq 0$ za svaki $i=1,2,\dots,n$

(iii) Ispod dijagonale od L, vrijednost l_{ij} je negativni množilac reda j koji smo dodali redu i sa ciljem eliminisanja (i,j) pozicije prilikom primjene elementarne red operacije tipa III.

(iv) U je konačan rezultat primjene konačno mnogo elementarnih red operacija tipa III primjenjenih na A.

(v) Matrice L i U su jedinstveno određene sa osobinama (i) i (ii).

Dekompozicija od A u $A=LU$ zovemo <u>LU faktorizacija od A</u>, a matrice L i U zovemo <u>LU faktori od A</u>.

Odrediti LU faktorizaciju matrice A

(tj. odrediti matrice L i U takve da $A = L \cdot U$)

gdje je $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{pmatrix}$.

Rj. Svedimo matricu A na gornje trougaoni oblik primjenom Gauss-Jordanovih operacija

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[III_v + I_v \cdot (-3)]{II_v + I_v \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{III_v + II_v \cdot (-4)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Prema tome

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{pmatrix} = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(#) Odrediti LU faktorizaciju matrice A

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix}.$$

Rj.:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 18 & 26 \\ 3 & 16 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow[III_v + I_v\cdot(-3)]{II_v + I_v\cdot(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{III_v + II_v\cdot(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Prema tome

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$A=LU$.

$II_v + I_v\cdot(-4)$

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$III_v + II_v\cdot(-2)$

$III_v + I_v\cdot(-3)$

Primjenom LU faktorizacije izračunati inverznu matricu matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Rj:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[III_v + I_v\cdot(-\frac{2}{3})]{II_v + I_v\cdot(-\frac{1}{3})} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 14/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III_v + II_v\cdot(-\frac{1}{14})} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 14/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 5/14 \end{pmatrix}$$

$6 - \frac{4}{3} = \frac{18-4}{3}$ $\quad 3 - \frac{8}{3} = \frac{9-8}{3}$ $\quad \frac{1}{3} + \frac{14}{3}\cdot(-\frac{1}{14})$

$1 - \frac{4}{3} = \frac{3-4}{3}$ $\quad 3 - \frac{8}{3}$ $\quad 1/3 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{14} = \frac{14+1}{3\cdot 14} = \frac{15}{3\cdot 14} = \frac{5}{14}$

$$A = L\cdot U, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/14 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 14/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 5/14 \end{pmatrix}$$

Sad iskoristimo ovu faktorizaciju i riješimo matričnu jednačinu $AX = I$ (rješenjem ćemo dobiti A^{-1})

$$A\cdot X = A\cdot \begin{bmatrix} | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & Ax_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} LUx_1 & LUx_2 & LUx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}$$

Uvedimo smjenu $y_1 = Ux_1$, $y_2 = Ux_2$, $y_3 = Ux_3$ i riješimo

$[Ly_1 \; Ly_2 \; Ly_3] = [e_1 \; e_2 \; e_3]$ gdje su nepoznate y_1, y_2, y_3.

$Ly_1 = e_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/14 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$y_{11} = 1$

$\frac{1}{3}y_{11} + y_{21} = 0 \Rightarrow y_{21} = -\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}y_{11} + \frac{1}{14}y_{21} + y_{31} = 0 \Rightarrow y_{31} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{14\cdot 3}$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ -9/14 \end{pmatrix} \quad \text{slično} \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/14 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sad riješimo sisteme $Y_1 = U x_1$, $Y_2 = U x_2$, $Y_3 = U x_3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ -9/14 \end{pmatrix}}_{Y_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 14/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 5/14 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}}_{x_1}$$

$$3x_{11} + 4x_{21} + 4x_{31} = 1$$

$$\frac{14}{3} x_{21} - \frac{1}{3} x_{31} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{14} x_{31} = -\frac{9}{14} \Rightarrow x_{31} = -\frac{9}{5}$$

$$\frac{14}{3} x_{21} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{14}{3} x_{21} = -\frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{-5-9}{15} = -\frac{14}{15}$$

$$x_{21} = -\frac{1}{5} \Rightarrow 3x_{11} - \frac{4}{5} - \frac{36}{5} = 1 \Rightarrow \underbrace{3x_{11} = 1+8}_{\Rightarrow x_{11} = 3}$$

Prema tome $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1/5 \\ -9/5 \end{pmatrix}$. Slično $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1/5 \\ 14/5 \end{pmatrix}$

Prema tome $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -1/5 & 1/5 & 1/5 \\ -9/5 & -1/5 & 14/5 \end{pmatrix}$